ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE

Année 1976

## OPTION DE BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

# 2e Épreuve de Mathématiques

Durée : 3 heures

## I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$ sur R, $u$ un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $k$ tel que $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$.

1° Soit $x$ un élément de E tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$.

*a.* Montrer que le système $x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{k-1}(x)$ est libre.

*b.* En déduire $u^n = 0$.

2° Quelles sont les valeurs propres de $u$?

## II

Soit A une matrice à $n$ lignes et $m$ colonnes, et B une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes. A et B ont leurs coefficients dans C.

1° Montrer l'implication :

$$(AB)^k = 0 \Rightarrow (BA)^{k+1} = 0$$

2° En déduire l'équivalence :

$$(AB)^n = 0 \Leftrightarrow (BA)^m = 0$$

Dans toute la suite, $m = 3$ et $n = 2$.

3° Soit $u$ une application linéaire de $R^3$ dans $R^2$ et $v$ une application linéaire de $R^2$ dans $R^3$.

*a.* Montrer que $v \circ u$ n'est pas injective.

*b.* En déduire que BA admet toujours la valeur propre 0.

*c.* Montrer que si $u \circ v$ est injective, $v$ l'est aussi.

On suppose dans le reste de cette partie que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4° Montrer que, si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, BV et BW sont vecteurs propres de BA. Pour quelles valeurs propres? En déduire qu'il existe une matrice diagonale semblable à BA.

.../...

Montrer $(BA)^3 = BA$.

*b.* En déduire $M_n = (BA)^2 + \sum_1^n \frac{1}{k!}(BA)^k$ en fonction de BA et de $(BA)^2$.

On note M la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de $M_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

*c.* Calculer M en fonction de $(BA)^2$ et de BA.

Montrer que les vecteurs propres de BA sont aussi vecteurs propres de M. Pour quelles valeurs propres?

## III

Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1° Calculer AB , BA , $(BA)^2$ et $(BA)^3$.

2° Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de BA.

3° On donne trois suites réelles $(u_n)$ , $(v_n)$ , $(w_n)$ par $u_0$ , $v_0$ , $w_0$ et les relations :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} - w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + v_{n-1} - 2w_{n-1} \end{cases}$$

Calculer $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et de $(BA)^n$ .

4° Montrer que les séries $u_2 + \sum_1^\infty \frac{u_n}{n!}$ , $v_2 + \sum_1^\infty \frac{v_n}{n!}$ et $w_2 + \sum_1^\infty \frac{w_n}{n!}$ convergent. Calculer leur somme en fonction de $u_0$ , $v_0$ et $w_0$.

Examiner les cas particuliers *a.* : $u_0 = -v_0$ et $w_0 = 0$ ;
*b.* : $u_0 = v_0 = w_0$ ;
*c.* : $2u_0 = 2v_0 = w_0$.

## IV

On donne $X_0$, $Y_0$ et $Z_0$ trois variables aléatoires normales, réduites centrées et indépendantes. On définit trois suites de variables aléatoires par les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_n = X_{n-1} - Z_{n-1} \\ Y_n = Y_{n-1} - Z_{n-1} \\ Z_n = X_{n-1} + Y_{n-1} - 2Z_{n-1} \end{cases}$$

On définit les variables aléatoires X, Y et Z par les relations :

$$X(\omega) = X_2(\omega) + \sum_1^\infty \frac{X_n(\omega)}{n!}$$

$$Y(\omega) = Y_2(\omega) + \sum_1^\infty \frac{Y_n(\omega)}{n!}$$

et

$$Z(\omega) = Z_2(\omega) + \sum_1^\infty \frac{Z_n(\omega)}{n!}$$

pour toute épreuve $\omega$.

Quelles sont les lois de X, Y et Z?

Sont-elles indépendantes?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail